

Ajuste Preliminar de la Red de Control Básico Vertical

Egdo. Ing. Oscar Carranco • Evaluador Cartográfico

1. Introducción

Una de las actividades fundamentales de SIRGAS- GTIII es la elaboración del diagnóstico de los datum verticales existentes, el nivel de referencia de los datum verticales latinoamericanos corresponde con el nivel medio del mar registrado en diferentes mareógrafos, durante diferentes períodos de tiempo, es decir, dichos niveles varían en función de la posición geográfica y están asociados a diferentes épocas de referencia, las redes verticales han sido extendidas en los diferentes países mediante nivelación geométrica de alta precisión y datos ajustado de las redes de nivelación de primer orden.

Entre los problemas actuales de la densificación de la Red de Nivelación de Primer Orden, que el Instituto Geográfico Militar (IGM) se encuentra realizando, está el poder determinar los valores únicos de alturas conocidas y confiables, ya que a pesar del trabajo realizado y los productos obtenidos de la nivelación, existe varias fuentes de error que es necesario ajustar.

Para el efecto, se ha venido trabajando en forma conjunta con el área encargada de realizar las

actividades en lo referente a nivelación, y es así que para este proyecto se han realizado actividades varias como planificación, ejecución y análisis de los resultados de diferentes líneas de nivelación.

Con estos datos recolectados en las campañas de campo, se chequearon tanto datos crudos (libretas de nivelación) como extractos de nivelación; de éstos se pudo determinar algunas inconsistencias que se estaban generando en varios casos, como que un mismo punto en lugar de tener un único valor de cota, poseía dos o más valores de cota. Esto hace que este proyecto sea una herramienta indispensable para realizar el ajuste de las cotas.

2. Metodología

Datos de Nivelación:

La cota de marca de nivel "BM3" l la misma que es considerada como punto de partida para el arrastre de la nivelación de toda la Red de Control Básico Vertical del País, es de 6,2707 metros, el mismo que corresponde al período de 1988-2009.

Ajuste:

Para el desarrollo del ajuste, se empleó el método de mínimos cuadrados, cuyo objetivo es el de

llevar el valor de los residuos de una medición al mínimo, es decir, si se realizan una serie de mediciones directas de una magnitud X, se tendrá que:

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_n \quad l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$$

Esto indica los valores que se obtienen en una serie de n observaciones.

Ante la imposibilidad de lograr un verdadero valor de X, es necesario realizar una estimación de un valor más probable en el cual se pueda confiar. Por esto se puede tomar un valor X aproximado y se evaluar sus discrepancias:

$$\left. \begin{array}{l} x - l_1 = v_1 \\ x - l_2 = v_2 \\ \dots \dots \dots \\ x - l_n = v_n \end{array} \right\} x - l_i = v_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Tales diferencias (vi) se denominan residuos, esto es, los valores a priori desconocidos, que sumados a los valores de observaciones, se obtiene el valor escogido de X.

Empleando el mismo criterio se puede elegir otro valor arbitrario aproximado x', lo cual crearía

un nuevo conjunto de residuos:

$$x'_i - l_i = v_j$$

Y si se quiere se puede tener más valores:

$$x - l_i = v_j$$

Como se puede observar, el problema radica en escoger el valor de X más apropiado, es decir, en determinar el criterio que permita, de las observaciones repetidas (l_i) discrepantes entre sí, extraer un valor único para determinar la incógnita X.

Lo que se quiere es que los residuos sean lo más bajo posibles y tiendan a cero.

Por esta razón siguiendo el camino indicado por Gauss y Legendre, aceptan como la mejor estimación de a un valor que haga mínima a la suma de los cuadrados de los residuos, de tal forma que (Gemael, 1994):

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min$$

Asimismo, cuando las observaciones no ofrecen un mismo grado de confianza se las homogeniza con pesos (p_i), quedando de esta manera la ecuación:

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \min$$

Estas dos ecuaciones se determinan en forma de matriz de la siguiente manera (Gemael, 1994):

$$V^T V = \min$$

Donde V es el vector columna los residuos:

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$$

Y en el caso con los pesos:

$$V^T P V = \min$$

La matriz de pesos P es una matriz cuadrada y diagonal.

La aplicación de mínimos cuadrados para un sistema de ecuaciones lineales es de la siguiente manera (Gemael, 1994):

$$A X = l_b + V = L_a$$

Donde:

L_a son los valores observados L_b son los valores de las observaciones corregidas.

Y si aplicamos el mejor estimador X y X que satisface la condición:

$$V^T V = \min$$

Resolviendo tenemos:

$$A^T A X - A^T L_b = 0$$

Esta última ecuación matricial representa un conjunto de ecuaciones u incógnitas, quedando como solución única la siguiente:

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L_b$$

Aplicando los pesos da como solución (Gemael, 1994):

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L_b$$

2. Procesamiento de los Datos:

Se analizaron todos los anillos posibles y las líneas de nivelación que conforman la Red de Control Básico Vertical, para lo cual se

encontró información muy ti temporal, desde 1977 hasta las realizadas en el 2010.

Figura 1

Con toda la información estructurada, se definieron los anillos y los nodos² que se utilizarían en el proceso del ajuste.

Dentro de este análisis, no se tomaron en cuenta los datos obtenidos mediante líneas radiales, ya que no conforman anillos; además las líneas de nivelación muy antiguas (más de 20 años) en vista de que los errores de cierre de los anillos de dichas líneas fueron muy altos.

También se puede apreciar que de las 24 provincias del Ecuador, existen 3 provincias (Pastaza, Morona Santiago y Zamora Chinchipe), a las cuales no ha llegado la nivelación y si existe no hay cierre de los anillos, por lo cual se debe extender la red a estas provincias.

Cabe indicar que la tolerancia³ de cada anillo requerida para una nivelación geométrica de primer orden que es:

$$\pm 4 \sqrt{k}$$

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, la Red de Control Básico Vertical quedó conformada por 20 anillos, los mismos que estaban estructurados por 57 líneas de nivelación, con un total de 37 nodos. *Figura 2*

² Se consideran nodos o puntos nodales a los puntos en donde convergen dos o más líneas de nivelación que conforman los anillos.

³ El valor de k de la tolerancia está expresado en km.

¹ Mareógrafo de La Libertad: nivel medio del mar (n.m.m) para el Ecuador. Dato proporcionado por el Instituto Oceanográfico de la Armada (INOCAR) según Oficio No. 0716-INOCAR-HID-O del 05 de abril de 2010



Figura 2 Figura 1



a vez definidos tanto los anillos como cada uno de los nodos; y chequeando los errores de cierre de cada circuito de nivelación, se procedió a obtener el desnivel y la distancia entre los nodos de la línea.

Se realizan las ecuaciones de condición, para obtener el número adecuado de ecuaciones de condición se debe restar del número de líneas (n_l) menos el número de nodos que intervienen en los anillos⁴ (u). Inicialmente hay 57 líneas y 37 nodos.

⁴ Hay que tener presente que el nodo cero es un dato conocido (BM-3)

$$\begin{aligned} r_c &= n_l - u \\ r_c &= 57 - 37 \\ r_c &= 20 \end{aligned}$$

LINEA	NODO	DISTANCIA	DESNIVEL
1	00-01	220,21	951,282
2	01-feb	4,23	225,524
3	02-mar	150,64	-1,184,327
4	03-abr	29,37	48,121
5	04-00	136,15	-40,726
6	06-jul	127,79	-329,005
7	05-jun	85,98	592,006
8	03-may	38,67	87,244
9	07-oct	178,79	1,948,450
10	11-jun	123,32	-1,765,091
11	09-ene	262,65	722,653
12	10-sep	88,45	-2,062,622
13	sep-13	185,39	-95,953
14	13-14	115,76	1,831,055
15	14-15	48,12	3,350,201
16	15-nov	33,82	-2,876,366
17	31-13	280,03	-15,633,843
18	28-31	109,64	-9,534,157
19	14-36	181,44	24,877,479
20	36-35	1,71	-574,197
21	35-33	42,08	1,754,288
22	33-15	104,89	-22,708,086
23	17-37	182,91	26,977,148
24	jun-17	17,96	-23,710
25	19-17	89,93	545,254
26	may-19	23,53	23,387
27	37-38	43,22	-2,161,803
28	39-21	205,54	-27,344,623
29	21-19	44,81	67,176
30	21-77	78,53	37,524
31	77-04	39,05	-32,268
32	38-39	5,70	1,917,068
34	41-39	228,55	-701,024
35	26-41	118,19	27,958,606
37	53-26	141,38	49,470
38	54r53	140,23	-26,239,525
39	41-54	111,80	-1,769,067
40	53-58	34,25	199,066
41	58-57	133,92	23,201,819
42	57-54	256,76	2,839,486
43	60-58	123,72	-20,241,538
44	61-60	26,39	13,066,646
45	57-61	89,89	-16,026,182
46	60-61	144,61	-13,066,317
49	68-31	249,33	11,600,415
51	34-69	198,03	-21,582,511
52	68-74	61,29	-1,297,988
53	74-73	37,23	-122,441
54	73-69	408,10	22,715,155
55	73-74	73,28	122,782
56	37-33	58,30	396,858
57	10-nov	3,00	145,258
58	07-feb	41,09	833,513
59	77-26	2,27	49,209
60	36-28	31,30	-1,539,907
61	28-34	28,00	448,834
62	34-35	19,96	516,579

Matriz W

ANILLO	(m)	(mm)
I	-0,0126	-12,6000
II	-0,0569	-56,9000
III	-0,0388	-38,8000
IV	0,0492	49,2000
V	0,1057	105,7000
VI	0,0627	62,7000
VII	-0,0717	-71,7000
VIII	0,0753	75,3000
IX	0,0220	22,0000
X	0,0345	34,5000
XI	0,0590	59,0000
XII	-0,0308	-30,8000
XIII	-0,0297	-29,7000
XIV	-0,0516	-51,6000
XV	0,0846	84,6000
XVI	0,0745	74,5000
XVII	0,0329	32,9000
XVIII	0,0895	89,5000
XIX	0,0009	0,9000
XX	0,0341	34,1000

De acuerdo a los criterios acerca de los pesos que se han presentado anteriormente, se definió la matriz de pesos (P-I) y se utilizó el inverso de la distancia (km) para este trabajo, es decir una observación tendrá mayor peso cuando la distancia de la línea sea menor.

Luego que se obtienen las matrices de peso se calcula el vector de los multiplicadores de Lagrange (K), de acuerdo a la ecuación siguiente:

$$K = -(B P^{-1} B')^{-1} W \text{ (erri)}$$

	0,005276
	0,027601
	0,235085
	-0,14617
	-0,06831
	-0,24754
	0,412956
	-0,32896
	0,081443
	-0,18577

	-0,21138
	0,022785
	0,578684
	0,137361
	-0,15237
	-0,13253
	-0,17194
	-0,27309
	0,13591
	-0,35436

Finalmente se calculó la vector de los residuos (V), de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$V = (P^{-1} B' K) \text{ (cm)}$$

	(mm)	(m)
1	1,1619	0,0012
2	-0,5960	-0,0006
3	4,9526	0,0050
4	6,3631	0,0064
5	0,7184	0,0007
6	33,5686	0,0336
7	18,3452	0,0183
8	-7,1066	-0,0071
9	15,8975	0,0159
10	-11,5762	-0,0116
11	-38,3910	-0,0384
12	-18,9703	-0,0190
13	-12,6635	-0,0127
14	-36,5622	-0,0366
15	-23,1584	-0,0232
16	-13,4355	-0,0134
17	-69,3178	-0,0693
18	2,8016	0,0028
19	30,0135	0,0300
20	-1,9407	-0,0019
21	11,6581	0,0117
22	8,8107	0,0088
23	-45,2727	-0,0453
24	-2,5717	-0,0026
25	-9,3817	-0,0094
26	-9,3447	-0,0093
27	-2,3541	-0,0024
28	21,4231	0,0214
29	13,1212	0,0131
30	-14,8101	-0,0148
31	-8,2543	-0,0083
32	0,4642	0,0005
34	5,2076	0,0052
35	18,9277	0,0189
37	19,4201	0,0194
38	-2,1047	-0,0021
39	15,3569	0,0154
40	-5,2187	-0,0052
41	-38,1543	-0,0382
42	-39,1224	-0,0391
43	-16,3971	-0,0164
44	-8,0352	-0,0080
45	-11,9135	-0,0119
46	-24,8648	-0,0249
49	-68,0894	-0,0681
51	-27,1657	-0,0272
52	8,3299	0,0083
53	-8,1328	-0,0081
54	55,4649	0,0555
55	-25,9672	-0,0260
56	-11,2546	-0,0113

57	0,9102	0,0009
58	7,1402	0,0071
59	0,0517	0,0001
60	10,3649	0,0104
61	8,5566	0,0086
62	8,8378	0,0088

Es así que con los valores

observados y los residuos calculados, se obtuvieron los valores ajustados de los desniveles, de acuerdo a la ecuación:

$$L_a = L_b + V$$

LÍNEA	DESNIVEL AJUSTADO (m)
1	95,1294
2	22,5518
3	118,4277
4	4,8185
5	4,0719
6	32,8669
7	59,2189
8	8,7173
9	194,8609
10	176,5207
11	72,2269
12	206,2812
13	9,6080
14	183,0689
15	334,9969
16	287,6500
17	1563,4536
18	953,4129
19	2487,7779
20	57,4216
21	175,4405
22	2270,7998
23	2697,6695
24	2,3736
25	54,5160
26	2,3294
27	216,1827
28	2734,4409
29	6,7307
30	3,7376
31	3,2351
32	191,7073
34	70,0972
35	2795,8795

37	4,9664
38	.2623,9546
39	.176,8913
40	19,9014
41	2320,1437
42	283,9095
43	.2024,1702
44	1306,6566
45	.1602,6301
46	.1306,6566
49	1159,9734
51	.2158,2783
52	.129,7905
53	.12,2522
54	2271,5710
55	12,2522
56	39,6745
57	14,5267
58	83,3584
59	4,9210
60	.153,9803
61	44,8920
62	51,66673777

NODO	COTA AJUSTADA (m)	NODO	COTA AJUSTADA (m)
0	6,2707	31	1583,0188
1	101,4001	33	2808,4309
2	123,9519	34	2581,3237
3	5,5241	35	2632,9904
4	10,3426	36	2690,4120
5	14,2414	37	2768,7563
6	73,4604	38	2552,5737
7	40,5934	39	2744,2809
9	29,1732	41	2814,3781
10	235,4543	53	13,5322
11	249,9810	54	2637,4868
13	19,5652	57	2353,5773
14	202,6341	58	33,4335
15	537,6311	60	2057,6037
17	71,0868	61	750,9472
19	16,5708	68	423,0454
21	9,8400	73	281,0027
26	18,4986	74	293,2549
28	2536,4317	77	13,5776

Con los datos obtenidos se comprueban en las ecuaciones de condición, las cuales deben ser igual a cero, caso contrario el ajuste está mal realizado.

Además se procedió a arrastrar la cota, desde el Mareógrafo de La Libertad a cada uno de los 37 nodos.

4. Conclusiones

- Se realizó el Ajuste Preliminar de los nodos de la Red de Control Básico Vertical por el método de mínimos cuadrados.
- Las líneas de nivelación de la Zona Oriental del país no fueron consideradas en el ajuste de la Red, en vista de que los errores de cierre que presentan en sus respectivos anillos son demasiado altos por ser muy antiguas.
- Las líneas radiales tampoco se consideraron porque no formaban anillos.
- El ajuste se lo realizó de 20 anillos, los mismos que estaban formados por 57 líneas de nivelación y 37 nodos.

- El dato de la altura del mareógrafo de La Libertad (punto BM-3) fue proporcionado por el INOCAR.

5. Recomendaciones

- Iniciar los trabajos planificados para realizar la realzar la nivelación geométrica de primer orden de las líneas de la Zona Oriental del país.
- Realizar el ajuste de los puntos densificados a partir de los valores ajustados de los nodos de la Red.

6. Bibliografía y Proyectos Relacionados

- Gemael C., Introdução ao Ajustamento de Observações,

Aplicaciones Geodésicas, Curitiba, 1994.

- Conocimientos Avanzados en Ciencias de la Tierra, en: <http://www.ign.es/ign/aig/D.pdf>.

- Leiva C., Determinación de parámetros de Transformación entre los Sistemas PSAD56 y WGS84 para el país, Tesis de Grado.

- Torres M., Generación de una Metodología pa-ra el Ajuste de la Red Gravimétrica Fundamental del Ecuador Continental, Tesis de Grado.

- Proyecto del Modelo Geoidal del Ecuador, Instituto Geográfico Militar.

- Proyecto SIRGAS - GTIII